

**G. W. Leibniz, *Prefacio al opúsculo de la cuadratura del círculo*, 1675/6 GM V,
93-98.**

Traducción y notas de Manuel Luna Alcoba
(I. E. S. Francisco Rodríguez Marín)

G. W. L. Prefacio al opúsculo de la cuadratura aritmética del círculo¹.

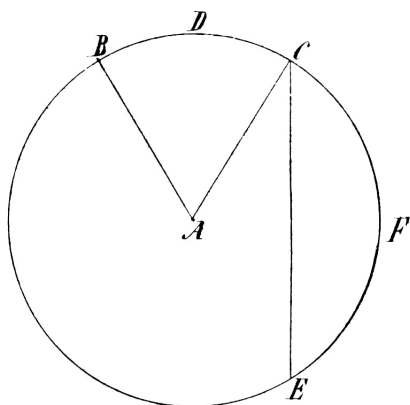
/93/ Puesto que el problema de la Cuadratura del Círculo se encuentra en todos los lugares y en brillantes estudios de investigación, escritos además por hombres absolutamente expertos y célebres en Geometría, será valioso exponer brevemente la naturaleza de la cuestión (que parece haber sido buscada desde siempre), qué se defendió antes de nosotros, qué rechazamos y qué quedará por hacer a la posterioridad.

Cuando Pitágoras y sus discípulos expusieron los elementos de la Geometría rectilínea, después redactados en un cuerpo por Euclides, ya se demostró que, para cualquier figura rectilínea plana dada, puede crearse un cuadrado igual, lo cual es evidentemente muy simple y, en cierto modo, es una medida de lo que queda. Empezó entonces a pensarse si no podría crearse una figura rectilínea igual al círculo y, por tanto, igualarlo al cuadrado. Y esto es lo que vulgarmente se llama la cuadratura del círculo, pues si pudiera describirse cierto Triángulo, u otro Polígono cualquiera, igual al círculo, en todo caso sería en potencia igual al cuadrado. Y puesto que Arquímedes señaló que un Triángulo rectángulo cuya altura sea de un radio y la base como la circunferencia extendida en recta, sería el doble del círculo², si alguien encontrase alguna recta igual a la circunferencia del círculo, daría con nuestra cuadratura.

Al llegar aquí, algunos que oyen la explicación, se admiran al ver facilísimo lo que tanto tiempo han buscado los Geómetras, pues ¿qué más fácil, que hallar una recta igual a la circunferencia circundando el círculo con un hilo material y después extendiéndolo en

línea recta y midiéndolo? Con el mismo derecho pueden decir que el círculo se cuadra fácilmente si una masa de cera, primero circular, después se vuelve una figura cuadrada, o si el agua de un cilindro cavado en madera se pasa a uno excavado en forma cuadrada, pues, a partir de la altura del agua, aparece cómo es el círculo -que es la base del cilindro- al cuadrado -que es la base del madero o prisma excavado- y si el agua se eleva el doble o triple más alto en el prisma que en el cilindro, el círculo será la mitad del cuadrado o un tercio y, de tal modo, otro cuadrado que sea el doble o el triple, será igual al círculo, en lo cual no hay ningún problema para la Geometría. Es sabido, en verdad, que no es tal cosa la que buscan los Geómetras, sino un camino para su investigación por el que, sin /94/ el círculo material o su transformación o aplicación al plano, pueda encontrarse y designarse la recta igual a la circunferencia, o también el lado del cuadrado igual al círculo, con cierto arte y regla o instrumento que tenga la capacidad de formar una línea recta, como son aquéllos con los que se describen los Círculos, Elipses u otras líneas. Por consiguiente, no se busca la cuadratura del círculo por el hilo extendido en recto, ni tampoco por la rueda hecha rodar en el plano o la regla aplicada en contacto sucesivo con las partes materiales de la circunferencia. De aquí, además, que no sea la que se busca la cuadratura del círculo mostrada por el contacto con la Hélice de Arquímedes, ni por tal la vendió Arquímedes³. Sin duda la Hélice es una línea curva que describe un recorrido avanzando por los radios alrededor del centro y de éste hacia la circunferencia, tocando al plano subyacente con su vértice inmóvil y dejando en él rastros de su movimiento, compuesto a partir de lo recto y lo circular. En esta medida se entiende que el movimiento de los radios alrededor del centro y el recorrido en el radio es uniforme o

proporcional. Tal línea no está en nuestro poder, pues (sin un círculo material) hasta ahora no hemos podido hacer que los radios se muevan siempre con velocidad igual o proporcional alrededor de los centros y a lo largo del radio. Además, si ya estuviese descrita, debería aplicarse cierta regla tangente a esta hélice sacada materialmente del plano, por la cual se determinaría necesariamente la recta igual al círculo.



Por otra parte, con el Problema de la Cuadratura del Círculo está conectado el problema de la sección universal del Angulo, o Trigonometría Geométrica, cuyos ángulos pueden tratarse, naturalmente, a semejanza de los de líneas rectas. Por ejemplo, puede encontrarse un ángulo, que tenga a otro dado

una razón dada de número a número, o también de recta a recta, lo mismo que, a partir de los lados dados de un Triángulo, puede encontrarse la cantidad del ángulo o la razón del arco tendido bajo éste a su circunferencia toda y como, inversamente, con un ángulo y dos lados, o con dos ángulos y un lado dado, se llega geoméricamente de modo parecido al Triángulo. Todo esto puede demostrarse también sin Tablas si se da la Cuadratura plena del Círculo, digo *plena*, esto es, del círculo y de todas sus partes, naturalmente de los segmentos, como CEFC, y de los sectores como ABDC. Sin duda, de esta manera, puede encontrarse también una recta igual a cualquier porción o arco de circunferencia, por ejemplo BDC, como señaló Arquímedes, y de ahí el arco (y lo que le corresponde en el ángulo) puede tratarse a semejanza de las líneas rectas, lo cual sería mucho más útil que la sola cuadratura del círculo. En efecto, de este modo, sin aquella Tabla de Senos, podríamos resolver todos los

problemas Trigonométricos y/95/ nadie ignora cuán grande es el uso de la Trigonometría en todas las cuestiones matemáticas.

Por otra parte, la Cuadratura del círculo igualmente plena y menos plena es o empírica o racional: la Empírica, se hace por el hilo extendido y otras transformaciones e intentos, y ésta ya la hemos rechazado; la Racional, se descubre por cierta teoría y siguiendo una regla nacida a partir de la naturaleza de la cosa. La Racional es exacta o aproximada, y una y otra o por cálculo o por trazado de Líneas: por cálculo finito o infinito y por números racionales o irracionales. Todas las aproximaciones a la cuadratura se llaman *Mecánicas*, se haga por el trazado de líneas, como los ingeniosísimos Willebord Snell⁴ y en primer lugar ningún otro que Christian Huygens⁵, o se haga por cálculo, como lo hicieron Arquímedes, Metius⁶, Ludolpho de Colonia⁷, Jac. Gregorio Scoto⁸ y otros⁹. Arquímedes, ciertamente, vio que, por medio de Polígonos inscritos y circunscritos, puede aproximarse la magnitud del círculo cuanto se quiera¹⁰. En efecto, si dos Polígonos semejantes, como los que Euclides enseña a delinear, por ejemplo los Trígonos, Hexágonos, u otros, se inscriben y circunscriben en el círculo, podrían, por la bisección de los ángulos que incluyen (pues la bisección de los ángulos puede hacerse por los *Elementos*) inscribirse y circunscribirse otros dos con el doble número de lados o ángulos que se tenían, y esto puede continuarse al infinito, cayendo siempre el círculo entre los últimos inscrito y circunscrito. Es decir, si comienzas por los trígonos, se sigue por los hexágonos, dodecágonos, 24^{ágonos}, 48^{ágonos}, 96^{ágonos}, inscritos y circunscritos de modo semejante, pudiéndose proceder de este modo hasta donde quieras y, puesto que en estas bisecciones de los polígonos siempre puede tenerse geoméricamente el área con bastante exactitud numérica, siempre se tendrán las

áreas entre las que cae el círculo, aproximándose siempre al mismo y, de esta manera, puede hacerse que el error sea menor que cualquiera dado, esto es, si se me pide un número que exprese la razón de la circunferencia al diámetro tan aproximada que no difiera en verdad como la centésima a la milésima u otras partes de la unidad, esto puede hacerse continuando la bisección. Este método lo comenzó Arquímedes, Metius lo llevó más lejos, pero mucho más lo prolongó la increíble labor producida por Ludolfo de Colonia, quien, si hubiese conocido los compendios nacidos hoy día, al menos habría visto aliviado su trabajo en gran parte. A partir de las proporciones halladas, para el uso en los muy pequeños, basta la Arquimédica, a saber, que la circunferencia es al diámetro como 22 a 7¹¹; en las medianas, la de Metius, que es como 355 a 113; en las grandes basta con que se use la fracción de Ludolpho, que es como ... /96/a ... Hallada la razón del diámetro a la circunferencia, puede medirse con facilidad cualquier otro arco por medio de la Tabla de Senos. Pues, si alguien extrae de la tabla el seno de medio minuto y lo duplica, tendrá la cuerda de un minuto o el arco mismo, que es la 21600^{ava} parte de la circunferencia. La cuerda que se desea puede suponerse, con mediocre exactitud, igual a su arco y, de este modo, para encontrar la longitud correspondiente, por ejemplo, a siete grados, puesto que contiene 420 minutos, basta encontrar la longitud de la cuerda de un minuto a partir de la Tabla y multiplicarla por 420. Si alguien quiere proceder aún con mayor exactitud, puede usar del mismo modo los minutos y segundos del seno.

Y, ciertamente, esta cuadratura del Círculo por partes, aunque sea Racional, se llama no obstante Mecánica. Es exacta también la que muestra la magnitud buscada del Círculo o arco exactamente, y ésta es *Lineal* o *Numérica*, es decir, o por el trazado de líneas o por la expresión de los valores. El valor puede expresarse

exactamente por la cantidad o por la progresión de la cantidad, cuya naturaleza y modo de continuación se conoce. Por la cantidad, por ejemplo, si se da algún número racional o irracional o también Algebraico, incluido en cierta ecuación, por el que se expresa el valor del arco del círculo. Por progresión, si se muestra cierta progresión, de la cual se da la regla de continuación al infinito, que expresa exactamente, tomada toda a la vez, el valor del arco o del círculo. La primera expresión la llamo *Analítica*, la posterior, en fin, como la progresión procede por números racionales, parece que puede proponérsele con razón el título de *Cuadratura Aritmética* cuando digo: Si el cuadrado del diámetro es 1, el círculo se iguala a la progresión completa de la fracción de los impares alternativamente positivos y negativos bajo la unidad, esto es, $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc., al infinito, como se demostrará en este opúsculo, donde no puede negarse que se halla precisamente cierto valor exacto del círculo y alguna expresión de su magnitud completamente verdadera. Alguien dirá que, la misma serie completa de estos números, no es nada en absoluto, pues puede aumentarse y disminuirse. Con tal convicción pueden ser anulados muchos teoremas. Me pregunto, cómo es posible que no sea nada, si expresa el valor del círculo, a menos que juzguemos que tampoco éste es nada. Pero si es algo, por consiguiente, descubrimos, en todo caso, cierto valor exacto del círculo. Y si alguien hallase alguna vez la progresión de los caracteres, del mismo modo como puede continuarse al infinito sin cálculo la conocida expresión de Ludolfo (generalmente se necesita cierta regla para mantener constante una progresión tal), lo cual /97/ sería bellísimo, tendría la cuadratura Aritmética del círculo en íntegros, así como nosotros la dimos en fraccionales. Pero opino que esta regla sería

dificilísima e inútilmente compuesta y de menor belleza para demostrar teoremas. En la nuestra, resplandece cierta maravillosa simplicidad de naturaleza -por ejemplo, los mismos números, que son las diferencias de todos los cuadrados en orden¹², expresan la razón del círculo al cuadrado del diámetro-, de tal modo que difícilmente la expresión analítica del círculo se hará por una cantidad y, si alguna vez se hallase tal cantidad, la posteridad encontraría más hermosa la expresión, excepto que, con la misma regla se halla no sólo el círculo, sino cualquiera de sus partes, no sólo la circunferencia, sino cualquier arco, lo cual es imposible que se haga de la misma manera con la expresión analítica. De nuestra regla general y por esto, de la *Cuadratura Aritmética plena*, se obtiene, suponiendo la Tangente, b , no mayor que el radio, y siendo el radio la Unidad, que, evidentemente, el arco, no es mayor al cuadrante que $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$ etc.

Por lo que los problemas Trigonómicos aparecen resueltos sin tablas. De lo cual enseguida veremos más.

Además, quedan dos cuadraturas exactas, una Lineal o Geométrica, la otra Analítica. Ciertamente, no todo lo Analítico es Geométrico. En efecto, pueden expresarse ciertas magnitudes, que no pueden mostrarse con el trazado de líneas por las artes conocidas y, al contrario, pueden trazarse líneas por instrumentos cuya expresión aún no está en nuestro poder. Sin duda, alguna vez se muestran Líneas Geométricas, tan geométricas como las parábolas e hipérbolas y necesarias únicamente para solucionar algunos problemas, que los Cartesianos describen no menos fácilmente por los movimientos de reglas avanzando con alguna proporción y, sin embargo, no pueden referirse con el cálculo a ninguna ecuación ni dimensión. También será cuadratura perfecta aquella que sea a la vez Analítica y lineal, o que se construya de

igual manera que las líneas referibles a ecuaciones de ciertas dimensiones. Su imposibilidad fue afirmada por el ingeniosísimo Gregory en el libro *De la Verdadera Cuadratura del Círculo*¹³, pero ciertamente en aquel tiempo no acabó la demostración, si no me equivoco. Yo no veo aún qué impide medir la circunferencia misma o alguna parte determinada suya y que la razón del arco a su seno se exprese por una ecuación de cierta dimensión. Pero *la relación del arco al seno es imposible de resolver en general para las ecuaciones de cierta dimensión*, como demostraré en el opúsculo, a partir de lo cual/98/ se deduce este Corolario: "No puede hallarse la cuadratura plena analítica, expresada por una ecuación con términos cuyas dimensiones sean números racionales, más perfecta que la que dimos cuando dijimos que el arco no es mayor al cuadrante que $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$ etc. Suponiendo su tangente b y el radio 1". En efecto, como quiera que se haga, en todo caso se progresa al infinito, pues de otra manera, como se ha indicado, o no será plena, o no mostrará cualquier arco, o será con seguridad de muy elevada dimensión, lo cual hemos demostrado que es absurdo. Pero si progresa al infinito, en cualquier caso, no es más perfecta que la que dimos. Puesto que su imperfección consiste en que progresa al infinito, es posible que sea por fortuna más cómoda y simple que la nuestra, pero esto nos interesa poco, sobre todo cuando ni siquiera hace verosímil que pueda hallarse una expresión en alguna índole más simple y más natural y que impresione más a la mente, salvando la generalidad. Lo cual se demuestra fácilmente del siguiente modo. Sea la ecuación hallada de cierto grado cualquiera, por ejemplo, cúbica, cuadrato-cuadrática, sordosólida o de quinto grado, de sexto grado, y así sucesivamente, de tal manera que la ecuación hallada tenga alguna dimensión máxima y por exponente un número

finito. Supuesto esto, puede trazarse la línea curva de este grado, de modo que la abscisa exprese el seno, y la ordenada el arco o al contrario. En consecuencia, el arco o el ángulo de la línea podrá necesariamente dividirse en una razón dada, o del arco, que tiene un razón dada, a lo precedente, se hallará el seno. Por consiguiente, el problema de la sección universal del ángulo será de cierto grado, naturalmente sólido o sordosólido, o de otro grado más alto, sin duda el señalado por la naturaleza o ecuación de la línea susodicha. Pero esto es absurdo. En efecto, es sabido que son tantos los diferentes grados del problema, cuantos son los números (al menos impares) de la sección: pues la bisección del ángulo es un problema plano, la trisección un problema sólido o cónico, la quinta sección es un problema sordosólido y así sucesivamente al infinito; el problema se hace más alto cuanto mayor es el número de partes iguales en las que está dividido el ángulo, lo que según los *Analíticos* es cosa reconocida y podría probarse de modo universal, si correspondiese en este lugar. Es imposible, en consecuencia, que la relación del arco al seno se exprese en general por las ecuaciones de cierto grado determinado. Q. E. D.

Notas del traductor

¹ El Prefacio a la cuadratura aritmética del círculo está escrito en 2º abarcando 3 páginas y tres cuartos de otra. Para la traducción hemos seguido la edición de Gerhardt (GM V, 93-8) corrigiéndola en algunos puntos por su cotejo con el manuscrito.

² Se refiere a la proposición 1 de la obra de Arquímedes *Medida del círculo* (cfr.: *Científicos griegos*, recopilación, estudio preliminar, preámbulos y notas por Francisco Vera, vol. II, Aguilar, Madrid, 1970, pág. 94 -en ésta, como en las restantes citas de Arquímedes, quisiera manifestar mi agradecimiento a la Prof. Dra. Carmen Hernández de la Universidad de Sevilla, cuyos enormes conocimientos en la materia me han sido de gran ayuda).

³ Lo que hizo Arquímedes en su obra *Sobre las espirales* fue obtener cuadraturas diversas de áreas relacionadas con la espiral (III, prop. 20 y ss.) y mostrar cómo, teniendo un arco de círculo, puede obtenerse la dimensión del círculo o al contrario. La cuadratura arquimédica de la espiral fue la base sobre la cual los matemáticos del siglo XVII obtuvieron sus cuadraturas, si bien por procedimientos geométricos y poco rigurosos (cfr.: González Urbaneja, P. M. *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*, Alianza Editorial, Madrid, 1992, págs. 69 ss.).

⁴ Se está refiriendo al cálculo abreviado de la cuadratura del círculo por medio de aproximaciones geométricas expuesto por W. Snell (1580-1626) en su *Cyclometricus*, Leiden, 1621.

⁵ Christian Huygens (1629-1695), matemático y científico suizo con quien Leibniz mantuvo una larga correspondencia. Alude, probablemente, a la demostración y ampliación de la regla de Snell expuesta por Huygens en su *De circuli magnitudine inventa*, Leiden, 1654.

⁶ Adriaen Antonisz Metius (1527-1607), matemático e ingeniero francés que dio la aproximación $\pi = 355/113$, publicada por su hijo (Adrien Metius) en su obra *Problemata Astronomica, geometrice delineata*, Leyde, 1625.

⁷ Ludolph von Ceulen (1540-1610), matemático holandés que en sus *Fundamenta arithmetica et geometrica*, Leiden, 1615, daba una aproximación a π de 32 cifras calculando el perímetro de polígonos inscritos y circunscritos de 2^{62} lados. Se dice que este valor, denominado número ludolfiano, fue su epitafio.

⁸ James Gregory (1638-1675) en su *Geometria pars universalis*, Padua 1668, pág. 123, tras dar una cierta aproximación a la cuadratura del círculo acababa por confesar que "... me nullo modo potuisse invenire rationem inter curvam ellipticam vel hyperbolicam et rectam ..., ita ut facile credam, hanc rationem esse non analyticam, et uno gradu esse superiorem illa inter circulum et diametri quadratura". La serie de Gregory para el cálculo del arco tangente de 1, hallada en 1671,

era $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. El problema de esta serie

es que, programando un superordenador de los actuales para efectuar las sumas y multiplicaciones, no llegaría a proporcionar una cifra exacta de pi por año.

⁹ Listas semejantes pueden encontrarse en Leibniz a Oldenburg, 30-III-1675 y Leibniz a La Roque, finales-1675, Ak III, 1, 202 y 338 respectivamente.

¹⁰ Los polígonos inscritos y circunscritos aparecen en el tratado de Arquímedes Sobre la esfera y el círculo, Libro I, proposiciones 6 y 7 (cfr.: Científicos griegos, vol. 1, págs. 30-1).

¹¹ La proposición 2 del escrito de Arquímedes Medida del círculo afirma: "La razón de un círculo al cuadrado de su diámetro es aproximadamente la de 11 a 14". En la proposición 3 del mismo tratado se demuestra que "la circunferencia de un círculo es igual al triple del diámetro y una parte de éste menor que la séptima, y mayor que diez setenta y un avos del diámetro" (cfr.: Científicos griegos, vol. 2, págs. 96 y ss.).

¹² Se refiere a que $1^2 - 0^2 = 1$; $2^2 - 1^2 = 3$; $3^2 - 2^2 = 5$, etc.

¹³ Cfr.: Gregory, J. *Vera circuli et hyperbolæ quadratura*, Padua, 1667.