

**G. W. Leibniz, *Præfatio opusculi de Quadratura Circuli Arithmetica*, (1675/6) *GM*  
*V*, 93-98.**

Transcripción y notas de Manuel Luna Alcoba  
(I. E. S. Francisco Rodríguez Marín)



**G. W. Leibniz, *Præfatio opusculi de quadratura circuli arithmetica.***

/92/ Quoniam Problema de Quadratura Circuli in omnium ore versatur et ardentibus quærentium studiis etiam apud homines Geometriæ prorsus expertes celebre redditum est, operæ pretium erit naturam quæstionis paucis exponere, ut appareat quid ab omni ævo quæsitum sit, quid ante nos præstitum, quid à nobis adjectum quidque agendum supersit posteritati.

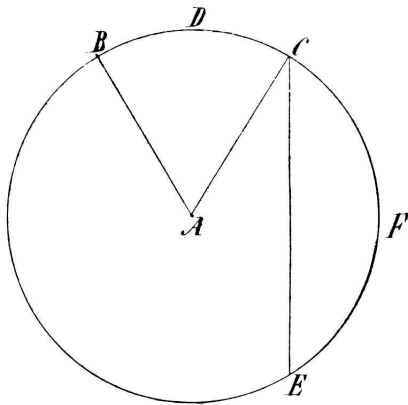
Cùm Pythagoras eiusque discipuli Geometriæ rectilinea Elementa absolvissent, quæ postea ab Euclide in unum corpus redacta sunt; jamque id effectum esset, ut cuilibet figuræ rectilineæ planæ datæ exhiberi posset quadratum æquale, quod scilicet omnium figurarum rectilinearum simplicissimum et quodammodo cæterorum mensura est; cogitari coepit an non posset circulo exhiberi æqualis figura rectilinea, adeoque et æquale quadratum. Et hoc est illud quod Circuli quadratura vulgo vocatur; nam si Triangulum quoddam aut aliud Polygonum quodcunque Circulo æquale describi posset, utique et quadratum ei æquale esset in potestate. Et quoniam Archimedes ostendit, Triangulum rectangulum, cujus altitudo sit radius, basis autem sit circumferentia in rectam extensa, fore circuli duplum; ideò si quis inveniret<sup>a</sup> rectam quandam circumferentiæ circuli æqualem, daret nobis quadraturam.

Hic nonnullis, qui explicationem audiunt, mirari subit, an rem, ut ipsis videtur facillimam, tamdiu quæsierint Geometræ; quid enim facilius quam rectam

---

<sup>a</sup>"Inveniet" en Gerhardt.

circumferentiæ æqualem invenire, circulo materiali filum circumligando, idque postea in rectum extendendo, ac mensurando. Eodem jure dicere possent, facile quadrari circulum, si cerea massa primum circularis, postea ad quadratam figuram redigatur, aut si aqua ex cylindro cavo in trabem quadratam excavatam transfundatur, nam ex aquæ altitudine, apparebit quomodo circulus qui est basis cylindri, sit ad quadratum quod est basis trabis sive prismatis excavati, et si eadem aqua duplo vel triplo altius assurgat in primate quam in cylindro, erit quadratum circuli dimidium vel triens; adeoque aliud quadratum, quod hujus duplum triplumve sit, quale per Geometriam nullo negotio invenitur; erit circulo æquale. Verum sciendum est; tale quiddam à Geometris non quæri sed viam ab illis investigari per quam sine /94/ ullo circulo materiali ejusve transformatione aut ad planum applicatione, certa arte ac regula instrumentove quod dirigere sit in potestaté, qualia sunt, quibus Circulus aut Ellipsis, aliave linea describitur, inveniri ac designari possit recta circumferentiæ æqualis, vel etiam latus quadrati circulo æqualis. Itaque per filum in rectum extensum, aut etiam per rotam in plano provolutam, aut regulam circumferentiæ materialis partibus successivo contactu applicatam non quæritur quadratura Circuli. Hinc etiam quadratura Circuli per contactum Helicis ab Archimede exhibita non est illa quæ quæritur, neque pro tali eam venditavit Archimedes. Nimirum Helix est curva linea quæ describitur à stylo qui per radium circa centrum euntem à centro versus circumferentiam incedit, et planum subiectum immobile apice suo attingit inque eo vestigium motus sui, ex recto circularique compositi relinquit; modò intelligatur motum radij circa centrum et styli in radio esse uniformes aut proportionales. Talis autem linea non est in potestate, neque enim (sine circulo materiali) effici hactenus à nobis potest, ut æquali aut



proportionali                      velocitate  
 moveantur semper radius circa  
 centrum et stylus in radio.  
 Deinde si descripta jam esset,  
 deberet                      huic                      helici  
 materialiter ex plano excisæ  
 regula                      quædam                      tangens  
 applicari, cuius ope recta  
 circulo                      æqualis  
 determinaretur.

Porro Problemati de Quadratura Circuli connexum est problema de Sectione Angulorum universalis, sive Trigonometria Geometrica, cuius opè scilicet Anguli tractari possint instar linearum rectarum, ut possit angulus inveniri<sup>a</sup>, qui ad alium datum habeat rationem datam numeri ad numerum, vel etiam rectæ ad rectam, item út ex datis lateribus Trianguli inveniri possit quantitas anguli, seu arcus eum subtendentis ratio ad circumferentiam suam totam, et út vicissim uno angulo et duobus lateribus, vel duobus angulis et uno latere dato, cætera in Triangulo geometricè inveniantur. Hæc autem omnia præstari sine Tabulis possent, si plena Circuli daretur quadratura, plena inquam, id est circuli et omnium ejus partium, segmentorum scilicet, ut CEFC atque sectorum ut<sup>b</sup> ABDC, ita enim etiam cuilibet circumferentiæ portioni sive arcui, ut BDC, æqualis inveniri posset recta, quemadmodum ostendit Archimedes, ac proinde arcus (et qui illis respondent anguli) instar linearum rectarum tractari possent, quod longè utilius foret, quàm ipsamet circuli quadratura sola. Hoc enim modo sine ullis Sinuum Tabulis omnia problemata Trigonometrica efficere possemus; Trigonometria autem quantus sit in omni re mathematica usus, nemo ignorat.

<sup>a</sup>"Invenire angulus" en la transcripción de Gerhardt.

<sup>b</sup>Este "ut" fue intercalado por Gerhardt, pero no figura en el original.

Porro plena pariter ac minus plena Circuli Quadratura, vel Empirica est, vel rationalis. Empirica, quæ filo extenso, aliisque transformationibus ac tentamentis fieret, et hanc jam rejecimus. Rationalis, quæ arte quadam invenitur et secundum regulam ex rei natura ortam procedit. Rationalis autem est vel exacta, vel appropinquans. Utraque vel per Calculum vel per ductum Linearum. Per calculum vel finitum vel infinitum, et vel per numeros racionales; vel per irracionales. Omnis quadratura appropinquans appellatur *Mechanica* sive fiat per ductum linearum, quales sunt<sup>a</sup> igeniosissimæ Willebrordi Snellij et imprimis Christiani Hugenij aliæque nonnullæ, sive fiat per calculum, quemadmodum Archimedes, Metius, Ludolphus à Colonia, Jac. Gregorius Scotus, aliique fecere. Et Archimedes quidem vidit ope Polygonorum inscriptorum et circumscriptorum, quantumvis ad circuli magnitudinem accedi posse. Si enim Polygona duo similia, qualia delineare docet Euclides, ut Trigonum, Hexagonum, aliave circulo inscribantur ac circumscribantur<sup>b</sup>, poterunt angulis quos comprehendunt bisectis (bisectio enim anguli per Elementa fieri potest) alia duo duplum laterum vel angulorum numerum habentia inscribi ac circumscribi, idque in infinitum continuari, circulo semper inter ultimum inscriptum et circumscriptum cadente. Nempe si à trigono incipias, sequetur Hexagonum, Dodecagonum, 24<sup>gonum</sup>, 48<sup>gonum</sup>, 96<sup>gonum</sup>, inscriptum pariter et circumscriptum. Et hoc modo procedi potest, quousque voles, et quoniam cuiuslibet polygoni geometricè per has bisectiones inventi area semper haberi potest in numeris satis exactis ideo semper duæ habebuntur area, intra quas circulus cadet, quæ propius semper accedent et ita fieri potest, ut error sit minor quovis dato, id est si quis à me

---

<sup>a</sup>Este "sunt" falta en Gerhardt.

<sup>b</sup>El "ac circumscribantur" falta en Gerhardt.

postulet numerum, qui rationem circumferentiæ ad Diametrum tam propè exprimat, ut non differat à vero centesima millesima, aliave unitatis parte, id continuatis bisectionibus efficere possum. Hanc methodum Archimedes coepit, Metius longius, sed longissimè omnium incredibili labore produxit Ludolphus à Colonia, qui si scivisset compendia hodie nata, utique magna laboris parte fuisset levatus. Ex proportionibus autem inventis ad usum in minimis sufficit Archimedeæ, quod scilicet circumferentia sit ad diametrum ut 22 ad 7, in mediis Metiana, quòd sit ut 355 ad 113, in magnis satis est adhiberi partem Ludolphinæ, quod sit ut ..... /96/ ad .....<sup>a</sup> Inventa autem ratione diametri ad circumferentiam potest facilè omnis alius arcus quilibet mensurari ope Tabulæ Sinuum. Nam si quis ex tabulis excerpserit sinum dimidii minuti ac duplicaverit, habebit chordam minuti, seu ipsius arcus qui sit 21600<sup>ma</sup> pars circumferentiæ, quæ chorda, cum mediocris exactitudo desideratur, potest arcui suo æqualis poni, adeoque ad arcus exempli causa septem graduum inveniendam longitudinem, quoniam is 420 minuta continet, suffecerit chordæ unius minuti longitudinem ex Tabulis inventam per 420 multiplicari. Si quis exactius adhuc procedere velit, sinu Minuti secundi eodem modo uti potest.

Et hæc quidem Circuli eiusque partium quadratura, etsi Rationalis sit, Mechanica tamen appellatur. Exacta autem est, quæ quæsitam circuli aut arcus magnitudinem exactè exhibet, eaque aut *Linearis* aut *Numerica* est, scilicet vel ductu linearum, vel expressione valoris. Valor exprimi potest exactè, vel per quantitatem, vel per progressionem quantitatum, cuius natura et continuandi modus cognoscitur: per quantitatem, ut si quis numerum aliquem sive rationalem, sive irrationalem,

---

<sup>a</sup>Los puntos suspensivos figuran en el original.

sive etiam Algebraicum æquationi cuidam inclusum daret, quo valor arcus circuli exprimeretur; per progressionem, si quis ostendat progressionem quandam, cuius continuandæ in infinitum regula datur, totam simul sumtam arcus vel circuli valorem exacte exprimere. Prior expressio a me vocatur *Analytica*, posterior verò, cum progressio procedit in numeris rationalibus, jure *Quadraturæ Arithmeticæ* titulo censeri posse videtur, ut cum dico: Si quadratum diametri sit 1, circulum æquari toti progressionem fractionum sub unitate imparium alternis affirmatarum et negatarum, nempe

$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$  etc. in infinitum, ut in hoc opusculo

demonstrabitur, ubi negari non potest exactum quendam circuli valorem, expressionemque magnitudinis ejus aliquam omnino veram esse repertam. Ipsa enim series horum numerorum tota, utique non est nihil, potest enim augeri ac minui, possunt multa de ea theoremata evinci. Et quomodo, obsecro, possibilie est, eam esse nihil, si valorem circuli exprimit, nisi hunc quoque nihil esse putemus. Quodsi ergo est aliquid, utique aliquem circuli valorem exactum deprehendimus. Et si quis aliquando reperiret progressionem characterum, qua semel cognita Ludolphi expressio sine novo calculo continuari posset in infinitum (qualem progressionem utique regula quadam certa constare necesse est) quod /97/ foret pulcherrimum; is haberet quadraturam circuli Arithmeticam in integris, quemadmodum nos dedimus in fractis. Sed hanc regulam et difficillimam fore arbitror, et valde compositam, et minus pulchrum theorema exhibituram, ac nostra, in qua mira quædam naturæ simplicitas elucet, ut<sup>a</sup> illi ipsi numeri, qui sunt differentix omnium ordine quadratorum, circuli ad quadratum à diametro rationem expriment, ut adeo vix ipsa analytica circuli expressio una quantitate

---

<sup>a</sup>En Gerhardt figura "uti".

facienda, si quando reperietur, pulchrior futura videatur. Præterquam quod eadem regula non circulus tantum, sed et quælibet ejus portio, nec circumferentia tantum, sed et quilibet arcus inveniatur, quod expressione analytica æquabili fieri impossibile est. Regula nostra generalis, adeoque *Quadratura Arithmetica plena* huc redit, ut Tangente, quæ radio non major sit, posita  $b$ , radio Unitate, arcus ipse scil. quadrante non major sit  $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$  etc. Unde Trigonometrica problemata sine tabulis efficienda oriuntur. De quo postea.

Supersunt adhuc Quadraturæ exactæ duæ, altera Linearis, sive Geometrica, altera Analytica. Equidem nec omne Analyticum Geometricum est, possunt enim exprimi magnitudines quædam quæ per cognitæ artes non possunt ductis lineis exhiberi; contra lineæ designari possunt instrumentis, quarum Expressio nondum sit in potestate. Ostendam enim aliquando esse Lineas Geometricas, quæ non minus facilè ac Cartesianæ motibus regularum certa quadam ratione incedentium describantur et æque geometricæ sint ac parabolæ et hyperbolæ, et ad certa quædam problemata solvenda unicè necessariæ sint, calculo tamen ad æquationes quasdam certasque dimensiones, revocari nequeant. Perfecta autem quadratura illa erit, quæ simul sit Analytica et linearis, sive quæ lineis æquabilibus, ad certarum dimensionum æquationes revocabilibus, construatur. Hanc impossibilem esse asseruit ingeniosissimus Gregorius in libro *de Vera Circuli Quadratura*, sed demonstrationem tunc quidem, ni fallor, non absolvit. Ego nondum video quid impediatur circumferentiam ipsam aut aliquam determinatam ejus portionem mensurari, et cujusdam arcus rationem ad suum sinum, certæ dimensionis æquatione exprimi. Sed *relationem arcus ad sinum in universum æquatione certæ dimensionis explicari impossibile est,*

quemadmodum in ipso opusculo demonstrabo, unde /98/ et Corollarium hoc ducam: "Quadraturam plenam, analyticam, æquatione expressam, cujus terminorum dimensiones sint numeri rationales, perfectiorem quam dedimus, cum arcum

etc.  $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$  posita tangente ejus  $b$  et

radio 1, reperiri non posse". Qualiscunque enim dabitur, utique progredietur in infinitum, nam alioqui, ut ostensum est, vel non erit plena, sive non quemlibet arcum exhibebit, vel erit certæ ad summum dimensionis, quod absurdum esse demonstravimus. Quodsi jam progredietur in infinitum, hac utique, quam dedimus, perfectior non est. Eius enim imperfectio in eo consistit, quod in infinitum progrediendum est<sup>a</sup>. Commodiorem nostra ac simpliciore esse forte possibile est, sed id parum moramur, præsertim cum ne verisimile quidem fiat, aliquod natura<sup>b</sup> simpliciore atque naturaliorem et quæ mentem afficiat magis, salva generalitate, reperiri posse expressionem. Quod facile sic demonstratur. Esto æquatio illa inventa gradus cuiuscunque certi, verbi gratia, cubica, quadrato-quadratica, surdesolida seu gradus quinti, gradus sexti, et ita porro, ita scilicet ut maxima aliqua sit æquationis inventæ dimensio, exponentem habens numerum finitum. Hoc posito, linea curva eiusdem gradus delineari poterit, ita ut abscissa exprimente sinus, ordinata exprimat arcus, vel contra. Huius ergo lineæ ope poterit arcus vel angulus in data ratione secari, sive arcus, qui ad datum rationem habeat datam, inveniri sinus; ergo problema sectionis anguli universalis certi erit gradus, solidum scilicet, aut sursolidum, aut

---

<sup>a</sup>Esta frase falta en Gerhardt.

<sup>b</sup>"Aliquod natura" falta en Gerhardt.

alterius gradus altioris, quem scilicet natura vel æquatio huius lineæ dictæ ostendet. Sed hoc absurdum est; constat enim tot esse varios gradus problematum, quot sunt numeri (saltem impares) sectionum; nam bisectio anguli est problema planum, trisectio problema solidum sive conicum, quinque sectio est problema surdesolidum, et ita porro in infinitum; altius fit problema prout major est numerus partium æqualium, in quas dividendus est angulus; quod apud Analyticos in confesso est, et facile probari posset universaliter, si locus pateretur. Impossibile est ergo relationem arcus ad sinum, in universum certa æquatione determinati gradus exprimi. Q. E. D.